УДК533.6.3

Обтекание проницаемой пластинки дозвуковым потоком газа

Валиев Х.Х.

Проблемой изучения потоков воздуха через проницаемые ткани впервые практическим методом занялся В.О. Флоринский.

Теория аэродинамики проницаемых тел изучил и основал профессор МГУ Х.А. Рахматуллин. Он рассмотрел и решил задачу обтекания проницаемой пластинки дозвуковым потоком газа при линейном законе проницания. В этой работе решается та же задача при нелинейном законе проницания.

Возьмем неподвижную проницаемую пластинку длины l с бесконечным размахом с характеристикой проницаемости $0 < m < \frac{1}{2}$ и отнесем её к прямоугольной системе декартовых координат *Oxy* так, что концы имеют координаты *(0,0)* и *(l,0)*, Рис.1.

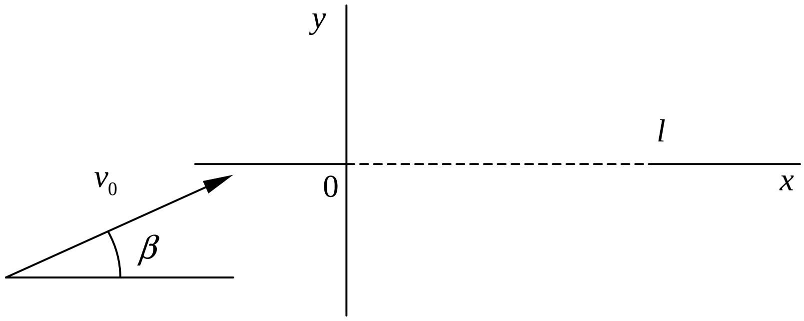

Рис.1

Пусть на эту пластинку набегает поступательный поток идеального газа со скоростью v_i, мало отличающейся от его скорости на бесконечности v_0, под малым углом β. Решим задачу обтекания этой пластинки таким потоком, определив скорость проницания газа через эту пластинку, потенциал скоростей, перепад давлений и подъемную силу пластинки. Как в обычной аэродинамике тонких тел и профилей, при решении поставленной задачи ввиду малости угла β, возможности малого возмущения, из-за присутствия самой проницаемой пластинки поток полагается потенциальным и установившимся. Если через $\varphi(x, y)$ обозначить потенциал скоростей возмущенного потока газа, то для этой функции имеет место линейное уравнение эллиптического типа

$$\left(1 - M^2\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad (1).$$

здесь M – число Маха.

Для придания более удобного вида, преобразуем это уравнение, положив:

$$x_1 = x;\ y_1 = \sqrt{1 - M^2}\, y; \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial y} = \sqrt{1 - M^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y_1};\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \left(1 - M^2\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2};\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}$$

и получим $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} = 0$.

Для удобства положив $x_1 = x; y_1 = y$ этому уравнению придадим вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad (2).$$

Теперь задача об обтекание проницаемой пластинки дозвуковым потоком формулируется следующим образом:

Найти решение уравнения Лапласа (2) при приграничных условиях

1. На пластинке $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_i - v_0\beta$ (3);
2. На бесконечности $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$ (4);
3. При законе проницания $\Delta p = a_0 v_i^2 + b_0 v_i$ (5).

Здесь Δp – перепад давления, v_i – скорость просачивания газа через пластинку, a_0 и b_0 – экспериментальные коэффициенты. Решение уравнения (2) – Лапласа будем отыскивать, исходя их положения, что рассматриваемая пластинка является поверхностью разрыва давлений и скоростей. Однако в этих разрывах скоростей, составляющая скорости $v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ разрыва не терпит, тогда как составляющая $v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ его терпит. Используем это положение. Оказывается, этим свойством пластинки обладает и система вихрей, непрерывно распределенная по пластинке бесконечно тонким слоем, Рис.2.

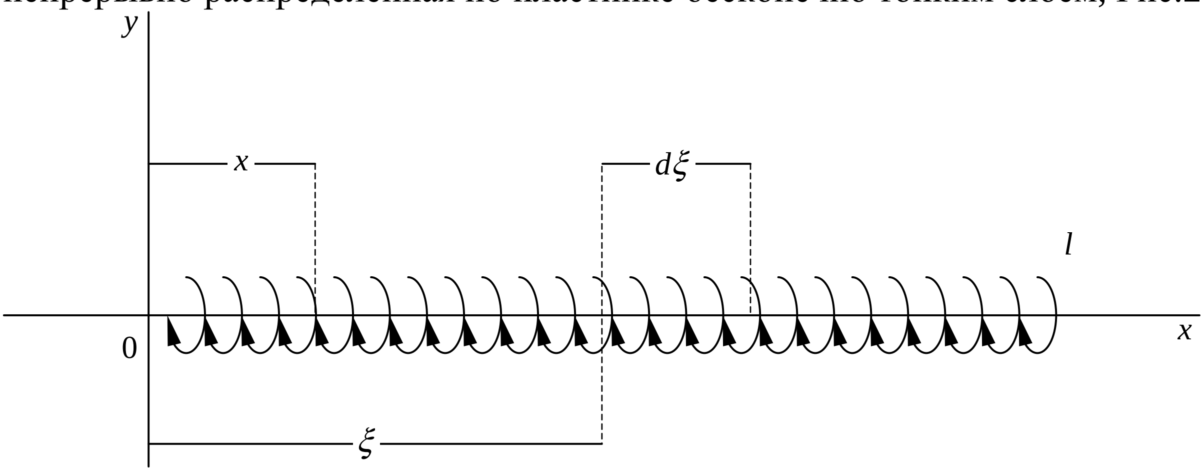

Рис.2

Обозначим интенсивность вихревого слоя через $\gamma\, м/с$, возьмем его элемент на расстоянии ξ от начала координат длиной $d\xi$. Тогда для составляющей $v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ скорости в точке на расстоянии x от начала координат по теореме Био-Савара имеет место равенство $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{\xi - x} d\xi$ (6).

Что касается составляющей скоростей вдоль оси Ox, вызываемых вихревым слоем, то они сверху и снизу пластинки равны между собой, но противоположны, а именно: $v_{xв} = \frac{\partial \varphi_в}{\partial x} = -\frac{\gamma(x)}{2}, v_{xн} = \frac{\partial \varphi_н}{\partial x} = \frac{\gamma(x)}{2}$, где индексы «в» и «н» указывают, что составляющие скорости по оси x взяты в верхней и нижней ее частях. Из последних равенств, вычитая по частям, получим

$$\gamma(x) = \frac{\partial \varphi_н}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_в}{\partial x} \qquad (7).$$

В дальнейшем нам потребуется взаимосвязь между интенсивностью вихря $\gamma(x)$ и перепадом давлений; для установления такой связи используем известную формулу (интеграл) Бернулли

$$p + \rho \frac{v_0^2}{2} = const \qquad (8),$$

где p – статическое давление, ρ – плотность, v_0 – скорость.

Если в некоторой точке потока газа скорость v, то для этой точки формула Бернулли будет

$$p + \rho \frac{v^2}{2} = const \qquad (9).$$

Разность между скоростью в некоторой точке M и скоростью v_0 в бесконечности обозначим через v' и найдем проекции на координатные оси. Так как по условию скорость $\overrightarrow{v_0}$ в бесконечности имеет наклон к оси Ox под углом β, то проекции скорости $\vec{v}$ будут:

$$v_x = v_0 \cos\beta + v'_x;$$
$$v_y = v_0 \sin\beta + v'_y.$$

Квадрат этой скорости в проекции будет:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 \cos \quad \beta + 2v_0 v'_x \cos \beta + v'^2_x + v_0^2 \sin \beta + 2v_0 v'_y \sin \beta + v'^2_y .$$

Ввиду малости β, v'^2_x, v'^2_y и $\sin\beta$, пренебрегая содержащими их слагаемыми, имеем

$$v^2 = v_0^2 \cos^2 \beta + 2 v_0 v'_x \cos \beta .$$

Теперь уравнение Бернулли (9) примет вид

$$p = -\frac{\rho}{2}\left(v_0^2 \cos^2\beta + 2v_0 v'_x \cos\beta\right).$$

Так как $v'_x = v_x - v_0 \cos\beta$, то при учете $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ имеем:

$$p = -\frac{\rho}{2}\left(v_0^2 \cos^2\beta - 2v_0 \cos\beta \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right).$$

Эти интегралы Бернулли в некоторой точке потока сверху и снизу пластинки будут:

$$p_н = -\frac{\rho}{2}\left(v_0^2 \cos^2 \beta - 2v_0 \cos \beta \frac{\partial \varphi_н}{\partial x}\right)$$
$$p_в = -\frac{\rho}{2}\left(v_0^2 \cos^2 \beta - 2v_0 \cos \beta \frac{\partial \varphi_в}{\partial x}\right)$$

Отсюда, вычитая по частям, получим:

$$\Delta p = p_н - p_в = \rho \cdot v_0 \cos\beta\left(\frac{\partial\varphi_н}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_в}{\partial x}\right) \qquad (10).$$

Сравнивая выражения (7) и (10), получим

$$\Delta p = \rho \cdot v_0 \cos\beta \cdot \gamma(x) \qquad (11),$$

сравнивая выражения (3) и (6), имеем

$$v_0 - v_0\beta = \frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{\xi - x}d\xi \qquad (12).$$

Сравнивая (5) и (11) также, получим

$$a_0 м_0^2 + b_0 v_i = \rho \cdot v_0 \cos\beta \cdot \gamma(x) \qquad (13).$$

Исключая $\gamma(x)$ из двух последних выражений, получим

$$\rho \cdot v_0 \cos\beta \cdot v_i - \frac{b_0}{2\pi}\int_0^l \frac{v_i}{\xi - x}d\xi - \frac{a_0}{2\pi}\int_0^l \frac{v_i^2}{\xi - x}d\xi = \rho \cdot v_0^2 \cos\beta \sin\beta \qquad (14),$$

здесь ввиду малости β он заменяется на $\sin\beta$.

Это есть относительно искомой v_i нелинейное сингулярное интегральное уравнение с постоянными коэффициентами.

Исключая v_i из этих же выражений (12) и (13), получим

$$\rho \cdot v_0 \cos\beta \cdot \gamma(x) - \frac{b_0 + 2a_0 v_0\beta}{2\pi}\int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{\xi - x}d\xi - a_0\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{\xi - x}d\xi\right)^2 = v_0 \sin\beta \cdot (b_0 + a_0 v_0 \sin\beta) \qquad (15).$$

Это есть относительно искомой $\gamma(x)$ нелинейное сингулярное интегральное уравнение с постоянными коэффициентами. К сожалению, решения этих типов сингулярных уравнений с ядром Коши пока нет. Для решения уравнения типа (15), мы применим следующий метод.

Ввиду малости β, пренебрегая слагаемыми $2a_0 v_0\beta$ и $v_0(b_0 + a_0 v_0\beta)\sin\beta$ уравнению придадим вид

$$a_0\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{\xi - x}d\xi\right)^2 + \frac{b_0}{2\pi}\int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{\xi - x}d\xi - \rho \cdot v_0 \cos\beta \cdot \gamma(x) = 0.$$

Введя обозначения $\frac{a_0}{4} = a$, $\frac{b_0 i}{2} = b$, $\rho \cdot v_0 \cos\beta = c$ этому уравнения придадим вид классического сингулярного интегрального уравнения:

$$a\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{\xi - x}d\xi\right)^2 + \frac{b}{\pi i}\int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{\xi - x}d\xi + c \cdot \gamma(x) = 0 \qquad (16).$$

Решая это как квадратное уравнение имеем:

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{\xi - x}d\xi = b \pm \sqrt{b^2 - 4ac\gamma(x)}.$$

Линиаризируя правую часть последнего уравнения, получим:

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{\xi - x}d\xi = b \pm \left(b^2 - 4ac\gamma(x)\right).$$

Если ввести обозначения $4ac = a_1, 2a = b_1, b + b^2 = f_1, b - b^2 = f$, последнее перепишется как два характеристических линейных сингулярных интегральных уравнения:

$$1^\circ \qquad a_1\gamma(x) + \frac{b_1}{\pi i}\int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{\xi - x}d\xi = f_1 \qquad (16)$$

$$2^\circ \qquad a_1\gamma(x) - \frac{b_1}{\pi i}\int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{\xi - x}d\xi = f \qquad (17)$$

Решение уравнения (16) дается формулой [*]

$$\gamma_1(x) = \frac{a_1}{a_1^2 - b_1^2} f_1 - \frac{b_1}{\left(a_1^2 - b_1^2\right)\pi i} f_1\left(\frac{\xi}{\xi - l}\right)^m \cdot \int_0^l \left(\frac{\xi - l}{\xi}\right)^m \cdot \frac{d\xi}{\xi - x}.$$

Так как $\int_0^l \left(\frac{\xi - l}{\xi}\right)^m \cdot \frac{d\xi}{\xi - x} = \pi\left(\frac{1}{\sin m\pi} - \operatorname{ctg} m\pi\left(\frac{x - l}{x}\right)^m\right)$, то

$$\gamma_1(x) = \frac{a_1}{a_1^2 - b_1^2} f_1 - \frac{b_1}{\left(a_1^2 - b_1^2\right)i}\left(\frac{1}{\sin m\pi}\left(\frac{x}{x - l}\right)^m - \operatorname{ctg} m\pi\right) \qquad (18).$$

Очевидно, интеграл $\frac{b}{\pi i}\int_0^l \frac{\gamma(x)}{\xi - x}d\xi$ наилучшим образом приблизится к $b^2 + \left(b^2 - 4ac\gamma(x)\right)$, если взять $\gamma(x) = \sqrt{\gamma_1(x)}$.

Уравнение (17) решается аналогично (16) уравнению.

Используя известное значение функции, нетрудно найти значение интересующих нас элементов потока газа.

1. По формуле $a_0 v_i + b_0 v_i = \rho \cdot v_0 \cos\beta \cdot \gamma(x)$ определится величина v_i.
2. По формуле $\Delta p = \rho \cdot v_0 \cos\beta \cdot \gamma(x)$ найдется значение перепада Δp.
3. Найдется решение уравнения Лапласа.
4. По формуле $P = \rho \cdot v_0^2 \cos\beta \cdot \int_0^l \gamma(x)dx$ определяется подъемна сила пластинки.

[*] См. С.Г. Михлин. Интегральные уравнения. М.1949.