

ЗАДАЧИ С КОНЕЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ В ПАКЕТАХ ANSYS И LS-DYNA. ВЕРИФИКАЦИЯ ИСПОЛЬЗУЮЩИХСЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

А. А. Шапиро, аспирант

Челябинск, Южно-Уральский государственный университет, кафедра ПМ и ДПМ

Современные пакеты метода конечных элементов (МКЭ) – такие, как ANSYS и LS-DYNA – являются многоцелевыми комплексами для анализа и решения широкого круга задач в различных областях физики. В этих пакетах заявлены возможности для решения задач в геометрически нелинейной постановке. Однако анализ отечественных и зарубежных литературных источников и простые тесты позволяют установить, что численные методы, используемые в настоящее время наиболее популярными пакетами для решения задач с конечными (т.е. не бесконечно малыми) деформациями, недостаточно корректны и дают адекватную оценку лишь в частных случаях. Отказ от гипотезы малости смещений и деформаций в механике деформируемого тела приводит к значительным проблемам, которые до сих пор до конца не решены, несмотря на свою актуальность для практических приложений. В данной работе основное внимание уделено проверке корректности результатов, получаемых при расчетах задач с конечными деформациями в пакетах МКЭ. Предложена схема верификации и сделана попытка очертить границы применимости двух популярных пакетов (ANSYS и LS-DYNA) для решения рассматриваемого круга задач.

Рассмотрение плоской задачи об однородном деформировании треугольного конечного элемента (КЭ) позволило достаточно легко получить аналитическое решение при отказе от гипотезы о бесконечной малости деформаций [1]. Простой тест, реализующий замкнутое деформирование закрепленного в одном узле треугольного КЭ (рис. 1, закреплен узел С), позволяет увидеть, что методы, имеющиеся в пакетах ANSYS и LS-DYNA, несовершенны. В конце процесса деформирования, когда треугольник приходит в исходное состояние, деформация, полученная пакетами, существенно отличается от нулевой (рис. 2).

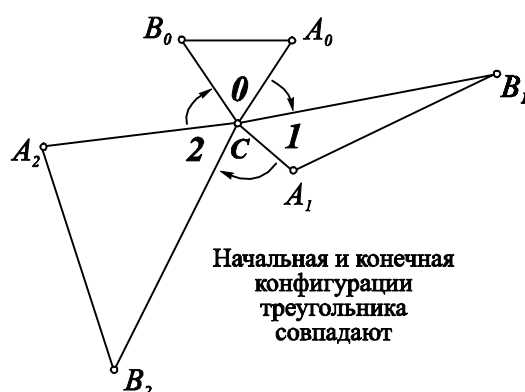


Рис. 1. История деформирования КЭ

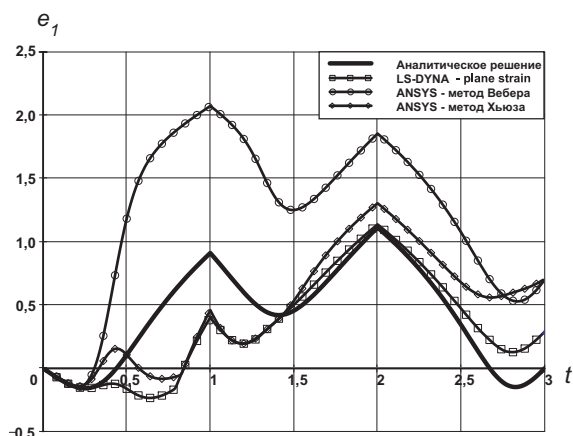


Рис. 2. Зависимость первой главной деформации логарифмической деформации от времени

Однако такой вариант верификации является достаточно «жестким» (деформации превосходят 100%) и не позволяет ответить на вопрос о том, в каких ситуациях каждый из проверяемых пакетов начинает получать недопустимую для инженерных расчетов погрешность. Попытаемся определить такой круг ситуаций, где верифицируемые пакеты будут давать приемлемые для анализа результаты.

Для этого разделим всякий процесс деформирования на отдельные тривиальные составляющие, которые, каждая со своей стороны, будут характеризовать этот процесс. Тогда последовательный перебор различных комбинаций этих составляющих позволит увидеть ситуации, в которых исследуемые пакеты МКЭ начинают допускать значительную погрешность.

Будем рассматривать однородно деформируемый треугольный КЭ на плоскости. Простейшими составляющими, характеризующими процесс деформирования, могут быть, например, равномерное всестороннее деформирование, максимальный сдвиг, изменение ориентации главных осей деформации и не зависящий от истории деформации поворот тела как жесткого целого. Названные процессы можно считать не связанными друг с другом; исключением является изменение ориентации главных осей, которое может наблюдаться лишь при наличии сдвиговых деформаций.

Так как деформированное состояние конечного элемента на плоскости полностью определяется тензором дисторсии (правым лагранжевым градиентом смещений) \mathbf{F} , характеризующимся в произвольной системе координат четверкой чисел, то названные составляющие процесса деформирования также характеризуются четырьмя параметрами (ниже они называются параметрами деформирования).

Величину, равную полусумме главных деформаций, будем называть цилиндрической деформацией (по аналогии с шаровой деформацией в трехмерном пространстве)

$$\varepsilon_c = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2. \quad (1)$$

Цилиндрическая часть тензора деформации на плоскости имеет вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = \varepsilon_c \mathbf{I} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \mathbf{I}, \quad (2)$$

где \mathbf{I} – единичный тензор на плоскости.

Девационную часть тензора деформации будем характеризовать величиной максимальной сдвиговой деформацией $\gamma_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ и углом ψ ориентации главных площадок относительно выбранной декартовой системы координат. В этой системе соответствующий тензор имеет координаты

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d = \frac{\gamma_{\max}}{2} \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Введенные три параметра деформирования позволяют записать тензор деформаций в виде суммы его цилиндрической и девационной частей

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\varepsilon_c, \gamma_{\max}, \psi) = \varepsilon_c \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_d(\gamma_{\max}, \psi). \quad (4)$$

Выражение (4) определяет обычную (инженерную) меру деформации, которая связывает изменение волокна $\Delta \mathbf{l}$ с его начальным размером \mathbf{l}_0

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \mathbf{l} / \mathbf{l}_0. \quad (5)$$

Дробь означает, что тензор, стоящий слева от знака равенства, является оператором, преобразующим вектор-знаменатель в вектор-числитель [2].

Для описания тензора дисторсии \mathbf{F} понадобится ввести еще один параметр φ – угол поворота тела как жесткого целого. Соответствующее преобразование характеризуется ортогональным тензором, отображаемым в декартовой системе координат матрицей

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Тензор дисторсии, как и любой несимметричный тензор, можно представить в виде произведения ортогонального и симметричного тензоров

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}, \quad (7)$$

здесь $\mathbf{U} \equiv \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}$ – симметричный тензор коэффициентов длины.

Таким образом, с учетом выражений (1–7) координаты тензора дисторсии в выбранном декартовом базисе можно однозначно выразить через четыре параметра деформирования $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\varepsilon_c, \gamma_{\max}, \psi, \varphi)$. Эти параметры однозначно определяют тензор дисторсии на плоскости.

Как уже отмечалось, в выражениях (1–5) фигурирует инженерная мера деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$, однако пакеты ANSYS и LS-DYNA используют логарифмическую меру деформации Генки [2, 3]

$$\mathbf{e} \equiv \ln(\mathbf{U}) = \ln(\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}). \quad (8)$$

Для тестирования результатов тензоры логарифмической деформации, вычисленные в пакетах ANSYS и LS-DYNA, подвергались пересчету в инженерную меру

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \exp(\mathbf{e}) - \mathbf{I}. \quad (9)$$

Комплексное тестирование, описанное ниже, производилось для пакета ANSYS, так как результаты, полученные этим пакетом в ходе простых тестов (рис. 1-2), [1], сильнее всего отличались от аналитического решения. «Худшие» ситуации (такие, в которых исследуемый пакет дает наибольшую погрешность), найденные в ходе настоящей верификации, были проанализированы затем для сравнения в пакете LS-DYNA. Алгоритм верификации пакета МКЭ состоял в следующем:

1) Задавалась история изменения описанных выше параметров деформирования ε_c , γ_{\max} , ψ , φ во времени. При этом весь процесс деформирования разбивался на маленькие шаги и по выражениям (1–7) вычислялись тензоры дисторсии в каждый момент времени. Решение данной задачи оказывается тривиальным из-за ее простоты (рассматривается однородная деформация), а найденное решение является точным. Все вычисления проводились в некотором математическом CAD-пакете (нами был использован пакет MathCAD).

2) На каждом шаге с помощью вычисленного тензора дисторсии и двух векторов, задающих начальную конфигурацию треугольника, определялись смещения узлов конечного элемента [1]. Полученная история смещений узлов передавалась в CAE-пакет (ANSYS или LS-DYNA) вместе с командным файлом расчета. Результатом расчета была история тензора логарифмической деформации.

3) Полученные данные возвращались в математический пакет, где уже был произведен аналитический расчет кинетики. На завершающем этапе выполнялись пересчет тензоров Генки в инженерную меру и сравнение полученных результатов. При сравнении из компонент рассчитанных тензоров деформаций составлялись исходные параметры деформирования ε_c и γ_{\max} , для которых и производилось сравнение. Таким образом, задавая изначально историю жесткого нагружения через параметры деформирования, после прогона через весь расчетный комплекс получали результаты в тех же параметрах.

Верификационный стенд был реализован в среде ОС Windows на основе сервера сценариев. Специально созданный скрипт связывал CAD и CAE приложения и обрабатывал полученные результаты. Испытания проводились для всех возможных комбинаций параметров деформирования. Сначала рассматривались такие варианты нагружения, когда изменялся только один из параметров, затем совместное влияние двух и трех параметров деформирования. Опыт с варьированием всех четырех параметров деформирования не целесообразен, так как из него так же, как и в случае теста с замкнутым деформированием, описанным выше, затруднительно получить полезную информацию. Существенно также, что некоторые из варьируемых комбинаций не имеют физического смысла и не реализуются, например, поворот главных осей невозможен без деформации.

Изменение варьируемых параметров производилось до некоторого заранее определенного максимального значения. Так максимальная цилиндрическая деформация во всех опытах составляла 2,0, а максимальный угол сдвига – 1,5. Максимальные значения углов ориентации главных осей и поворота тела как жесткого целого выбирались в диапазоне от

l до 2π , в зависимости от результатов теста. Если значительных погрешностей не наблюдалось при угле l , максимальное значение угла увеличивалось вплоть до 2π .

При анализе данных, полученных в ходе верификации, было замечено, что круг ситуаций, когда проверяемый пакет допускает недопустимые ошибки, достаточно узок. Частные случаи нагружения, когда участвует лишь один из элементарных процессов (цилиндрическое деформирование и чистый сдвиг с конечными деформациями и поворот тела как жесткого целого на конечный угол), рассчитываются пакетом с погрешностью не более 2%.

Наибольшие погрешности наблюдались при одновременном изменении сдвиговой деформации и повороте главных осей. Пример траектории деформирования, характерной для данной ситуации, приведен на рис. 3. Треугольник показан в исходном (0) и конечном (4) состояниях; изображены также три промежуточные конфигурации.

Из рисунка видно, что соотношение углов в треугольнике становятся недопустимым для адекватно сформулированного конечного элемента. В частности, в документации к пакету ANSYS [3] сказано, что получаемым в таких случаях результатам не стоит доверять. Тем не менее полученные результаты свидетельствуют о том, что уже для первой, не слишком искаженной конфигурации треугольника (рис. 3), абсолютная погрешность вычисления компонент тензора деформации достигает 15%, а для второй – 70%.

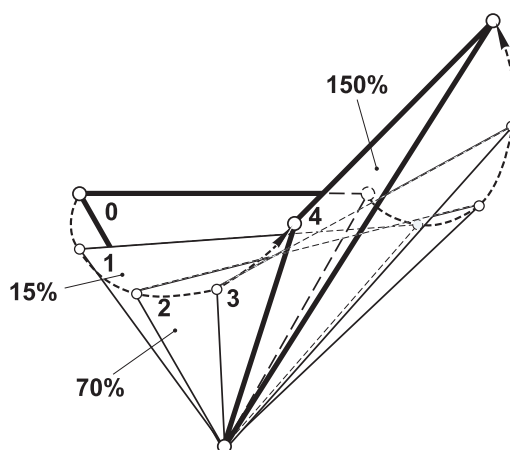


Рис. 3. Траектория деформирования КЭ в выявленном худшем случае

Дополнительное наложение на выявленное состояние цилиндрической деформации или жесткого поворота (опыты с варьированием трех параметров деформирования) вызывает дополнительное увеличение погрешности. Результаты этих опытов не противоречат выявленному «худшему» частному случаю.

Итак, ситуации, когда тело в процессе деформирования испытывает значительные сдвиговые деформации и положение главных площадок не остается постоянным, нужно анализировать имеющимся на сегодняшний день в пакете ANSYS средствами с большой осторожностью.

Тесты в пакете ANSYS проводились для двух формулировок конечного элемента, использующих численные методы Хьюза [4] (все SOLID и SHELL элементы) и Вебера [5] (элементы серии VISCO).

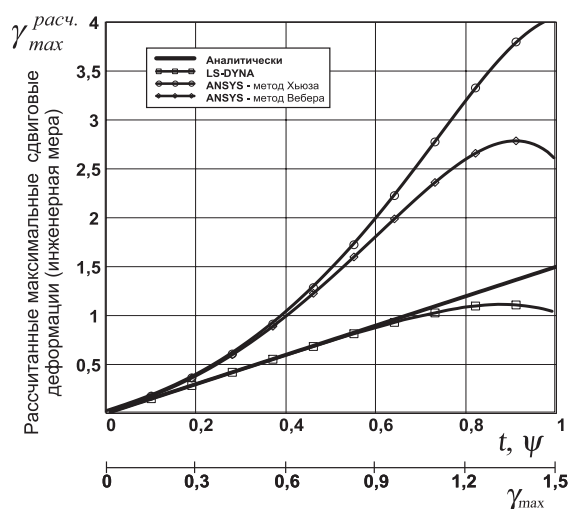


Рис. 4. Кинетика максимальных сдвиговых деформаций, рассчитанных аналитически и в пакетах

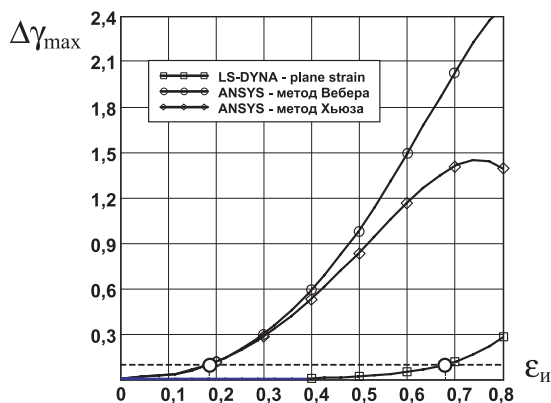


Рис. 5. Зависимость абсолютной погрешности вычисления пакетами максимальной сдвиговой деформации от интенсивности деформации в выявленном «худшем» частном случае

Опыт с выявленной «худшей» комбинацией параметров деформирования был произведен в пакете LS-DYNA (формулировка элемента – plane strain). После проведения такого компьютерного эксперимента была построена зависимость рассчитанных максимальных сдвиговых деформаций γ_{\max} от фиктивного времени проведения опыта t (рис. 4). Нагружение проводилось за один этап, на протяжении которого оба параметра деформирования (γ_{\max}, ψ) изменялись линейно. Таким образом, фиктивное время является монотонно изменяющимся параметром, показывающим, как в течение опыта менялись параметры деформирования.

Из рис. 4 отчетливо видно, что оба метода, используемые в пакете МКЭ ANSYS, сильно завышают значение вычисленных максимальных сдвиговых деформаций. Пакет LS-DYNA дает оценку в противоположную сторону, но начинает расходиться с аналитическим решением при значительно большей величине сдвиговых деформаций.

График зависимости абсолютной погрешности вычисления сдвиговой деформации от интенсивности деформации приведен на рис. 6. Интенсивность деформаций вычислялась, по компонентам рассчитанных тензоров инженерной деформации

$$\varepsilon_{II} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 6\varepsilon_{xy}^2}.$$

Как видно из рис. 5, при фиксированном значении интенсивности деформации результаты пакета LS-DYNA имеют значительно меньшую абсолютную погрешность вычисления, чем результаты, полученные в ANSYS. Надо отметить, что исследуемые пакеты имеют в своей основе различные методы интегрирования по времени. Так в пакете ANSYS используется неявный метод интегрирования, которому, в отличие от явного метода (LS-DYNA), присущи относительно большие шаги по времени. Это может в какой-то мере определять полученные результаты. Исследование влияния метода интегрирования на результат вычисления компонент тензора деформации в рамках данной работы не производилось.

Введя условно десятипроцентный допуск на величину абсолютной погрешности, можно примерно очертить область применения рассмотренных пакетов для решения задач с большими сдвиговыми деформациями и поворотом главных осей. Из графика на рис. 5 видно, что задачи с конечными деформациями можно уверенно решать в пакете ANSYS в случае, если интенсивность деформации в элементах не превышает 15–17%. Пакет LS-DYNA позволяет рассчитывать корректно задачи с существенно большими значениями интенсивности деформации – до 60–65%.

Можно предположить, что любая задача, в которой не происходит изменение положений главных площадок, будет рассчитана реализованными в исследуемых пакетах методами без значительных погрешностей. Однако в большинстве нелинейных задач (например, в задачах с контактом) положение главных осей обычно не остается постоянным.

Можно сделать предположение о возможных причинах возникающих ошибок. Используемые в исследуемых пакетах численные методы [3-5, 7] основаны на интегрировании по времени тензора, носящего в литературе название тензора скорости деформации (он представляет симметричную часть пространственного градиента скорости)

$$\mathbf{L}_s = (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)/2; \quad \mathbf{L} \equiv \mathbf{v}\nabla_r = d\mathbf{r}/dr. \quad (10)$$

Нелинейная связь между компонентами краевой задачи заставляет вести расчет малыми шагами по времени, линеаризуя систему нелинейных уравнений на каждом шаге. Оба пакета ведут расчет в приращениях параметров состояния, а не в их конечных величинах. В результате такого расчета кинетики деформирования тензор деформации вычисляется как сумма приращений тензоров логарифмической деформации, вычисленных на каждом шаге, т. е. путем интегрирования тензора скорости деформации. Однако можно показать [6], что

такой интеграл зависит от траектории деформирования, а значит, не может характеризовать тензор деформации, однозначно связывающий материальные волокна в исходном и деформированном состоянии.

Представляется также кажется спорным подход, базирующийся на вычислении тензора деформации по его скорости. Наиболее оправданным нам кажется определение скорости дисторсии и вычисление истории изменения тензора дисторсии, по которой впоследствии легко можно определить истории тензоров деформации и жесткого поворота.

Список литературы

1. Садаков О. С., Шапиро А. А. О корректности решения геометрически нелинейных задач пакетом МКЭ // Вестник Южно-Уральского государственного университета, серия: Математика, физика, химия. – 2003. № 6, выпуск 3.
2. Буслаева О. С., Садаков О. С., Шапиро А. А. Скаляр и тензор логарифмической деформации // Научно-технические ведомости СПбГТУ. – 2003. — №3 (33). с. 125-129.
3. ANSYS 6.1 Documentation, Theory Reference, Chapter 3. Structures with Geometric Nonlinearities.
4. Huges T. J. R. Numerical implementation of constitutive models: rate-independent deviatoric plasticity // Theoretical foundation for large-scale computations for nonlinear material behavior. — Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Netherlands. — 1984
5. Weber G. G., Lush A. M., Zavalianos A. An objective time-integration procedure for isotropic rate-independent elastic-plastic constitutive equations. // International journal of plasticity. — vol. 6., 1990. — p. 701–749.
6. Belytschko T., Liu W.K., Moran B. Finite Elements for Nonlinear Continua and Structures. McCormick School of Engineering and Applied Science Northwestern University Evanston, Published by Wiley. – 1996.
7. John O. Hallquist. LS-DYNA theoretical manual. Livermore Software Technology Corporation. — 1998.