

ДИАГНОСТИКА ПОВРЕЖДЕНИЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ШТАНГИ НА УПРУГОЙ ПОДВЕСКЕ

Хакимов А.Г.

*Институт механики Уфимского научного центра РАН
hakimov@anrb.ru*

По трем собственным частотам продольных колебаний определяются место и размеры поперечного надреза в вертикальной штанге на упругой подвеске, растянутой под действием собственного веса.

Ключевые слова: *штанга, вертикальная штанговая колонна, собственные частоты продольных колебаний, параметр надреза, длина надреза, координата надреза*

В наклонно направленных скважинах основным элементом, ограничивающим надежность и работоспособность насосной установки, является штанговая колонна. Наибольшее число отказов штанговых колонн вызвано обрывами штанг. Предполагается, что обрыву штанги предшествует появление участка с меньшей площадью поперечного сечения. В случае стержней конечной длины для определения наличия его дефектов может быть использовано изменение спектра собственных частот изгибных колебаний [1] или изменение частоты собственных продольных колебаний [2]. В [3] дается решение задачи определения переменной площади поперечного сечения от продольной координаты по известной зависимости перемещения свободного конца стержня от частоты возмущающей силы. В [4] и ряде других работ для стержня, совершающего продольные колебания, трещина моделируется как продольная пружина с жесткостью и для балки, совершающей изгибные колебания, повреждение моделируется вращательной пружинкой с жесткостью. Решению обратных задач о продольных бегущих волнах в стержнях конечной длины посвящена работа [5].

Рассматривается напряженно-деформированное состояние прямой штанги, закрепленной верхним концом на упругом подвесе жесткостью c_1 и растянутой под действием собственного веса (рис. 1). Предполагается, что в штанге имеется короткий участок (по сравнению с общей ее длиной) с меньшей площадью поперечного сечения. Этот надрез не приводит к изгибу штанги и моделирует ее повреждение, в частности, повреждение, типа раскрытой трещины. Рассматрива-

ется только напряженно-деформированное состояние в пределах упругости для тонкой штанги. Поскольку трещина появляется в результате развития незначительного зародыша, причем необязательно в наиболее напряженном сечении, то предполагается, что надрез может быть в любом месте по длине штанги. Задача состоит в определении координаты надреза и его размеров в приближении гипотезы плоских сечений.

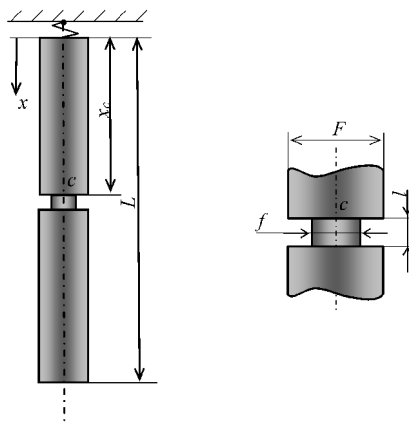


Рисунок 1

Обозначим через L, F длину и площадь поперечного сечения штанги, E, ρ, μ – модуль упругости, плотность и коэффициент внутреннего трения, через l, f – длину и площадь поперечного сечения надреза, x_c – его координату, u, T – перемещение и сила натяжения штанги. Между напряжением σ и деформацией ε принимается следующая зависимость

$$\sigma = E \left(\varepsilon + \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

В соответствии со сказанным имеем

$$E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad T = EF \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right).$$

Отсчитывая координату x от точки крепления, запишем граничные условия

$$T = c_1 u(x=0), \quad T = 0(x=L).$$

В пределах надреза с короткой длиной l и вблизи него имеется сложное пространственное напряженно-деформированное состояние [6]. Однако здесь для простоты принимаем одноосное растяжение – сжатие. Как показывают экспери-

ментальные результаты [7], средняя величина коэффициента затухания продольных колебаний подвешенной штанги с надрезом при ударе по нижнему торцу примерно на 20 % больше, чем этот коэффициент для такой же штанги без надреза. Рассматриваем динамическую задачу [2]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad T = EF \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right), \quad (1)$$

$$T = c_1 u(x=0), T = 0(x=L). \quad (2)$$

Обозначая функции в областях $0 \leq x \leq x_c$, $x_c \leq x \leq x_c + l$, $x_c + l \leq x \leq L$ индексами «1», «2», «3», соответственно, запишем условия стыкования решений при $x = x_c$ и $x = x_c + l$ (условия равенства усилий и перемещений) [8]:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} = m \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} \right), \quad u_1 = u_2, \quad (x = x_c), \quad (3)$$

$$m \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} \right) = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial t}, \quad u_2 = u_3, \quad (x = x_c + l), \quad m = \frac{f}{F}. \quad (4)$$

Условия вида (3) - (4) приводятся также в статье [8], где предложена универсальная процедура обработки данных разрезного стержня Гопкинсона [9]. Таким образом, в приведенной простейшей модели надреза фигурируют его координата x_c , длина надреза l и параметр m . В прямой задаче координата надреза x_c , его длина l и параметр m известны, в обратной задаче необходимо определить эти величины.

Частное решение задачи (1) при $\mu = 0$ имеет вид

$$u = (A \cos \alpha x + B \sin \alpha x) \sin \omega t \quad (\alpha = \omega/a, a^2 = E/\rho).$$

Шесть констант в этом решении, записанном для областей $0 \leq x \leq x_c$, $x_c \leq x \leq x_{cl}$, $x_{cl} \leq x \leq L$ ($x_{cl} \leq x_c + l$) определяются из шести граничных условий (2) - (4). Для того, чтобы $A_i, B_i (i = 1...3)$ не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы следующий определитель равнялся нулю

$$\det(a_{ij}) = 0, \quad (5)$$

где ненулевые элементы определителя записываются в виде

$$\begin{aligned} a_{11} &= c_1, a_{12} = E, a_{25} =, a_{26} = \cos(), \\ a_{31} &= \sin(\alpha x_c), a_{32} = -\cos(\alpha x_c), a_{33} = -m \sin(\alpha x_c), a_{34} = m \cos(\alpha x_c), \\ a_{41} &= \cos(\alpha x_c), a_{42} = \sin(\alpha x_c), a_{43} = -\cos(\alpha x_c), a_{44} = -\sin(\alpha x_c), \\ a_{53} &= m \sin(\alpha x_{cl}), a_{54} = -m \cos(\alpha x_{cl}), a_{55} = -\sin(\alpha x_{cl}), a_{56} = \cos(\alpha x_{cl}), \\ a_{63} &= \cos(\alpha x_{cl}), a_{64} = \sin(\alpha x_{cl}), a_{65} = -\cos(\alpha x_{cl}), a_{66} = -\sin(\alpha x_{cl}). \end{aligned}$$

Условие (5) дает частотное уравнение, которое здесь не приводится из-за его громоздкости.

Когда коэффициент $c_1 \rightarrow \infty$, тогда частотное уравнение упрощается. Применяя следующие соотношения при малых αl :

$$\sin(\alpha x_{cl}) = \sin(\alpha x_c) + \alpha l \cos(\alpha x_c), \quad \cos(\alpha x_{cl}) = \cos(\alpha x_c) - \alpha l \sin(\alpha x_c),$$

и пренебрегая $(\alpha l)^2$, получим

$$m^2 \left(-\sin(\alpha L) + \sin(\alpha L) \cos^2(\alpha x_c) - \cos(\alpha L) \sin(\alpha L) \cos(\alpha x_c) \right) + \\ + m \left(\sin(\alpha L) + \frac{\cos(\alpha L)}{\alpha l} \right) + \sin(\alpha x_c) \cos(\alpha x_c) \cos(\alpha L) - \sin(\alpha L) \cos^2(\alpha x_c) = 0 \quad (6)$$

Для штанги без надреза ($\alpha l = 0$) из уравнения (6) следует, что $\cos \alpha l = 0$, а собственные частоты равны [2] $\alpha l = (2k-1)\pi/2$ ($k=1,2,\dots$) или $\omega_k = (2k-1)\pi a/2L$.

Для определения m, l и x_c необходимо провести анализ собственных частот продольных колебаний штанги с надрезом. Такое исследование выполнено для изгибных колебаний балки в работах [10, 11].

Прямая задача. Решение уравнения (6) проведено численно для следующих параметров системы: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7800$ кг/м³, $L = 500$ м, $F = 0.00038$ м² (диаметр штанги 22 мм), $c_1 \rightarrow \infty$. Скорость звука $a = 5063.6$ м/с. При этом первая, вторая и третья собственные частоты штанги без надреза $\omega_1 = 15.908$ с⁻¹, $\omega_2 = 47.724$ с⁻¹, $\omega_3 = 79.540$ с⁻¹. Для штанги с надрезом при $x_c = 50$ м, $m = 0.75$, $l = 4$ м решение прямой задачи дает, что круговые частоты продольных колебаний штанги $\omega_1 = 15.86760$ с⁻¹, $\omega_2 = 47.64356$ с⁻¹, $\omega_3 = 79.51424$ с⁻¹. На рис. 2 приводятся зависимости круговых частот продольных колебаний штанги $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ от координаты надреза x_c для параметра $m = 0.1$ и различных l (в м). Эти зависимости имеют периодический характер. Вторая частота не «чувствует» надрез, если координата надреза $x_c = L/3$, а третья частота не «чувствует» надрез, если координата надреза $x_c = L/5$ и $x_c = 3L/5$ и все частоты не «чувствуют» надрез, если координата надреза $x_c \rightarrow L$.

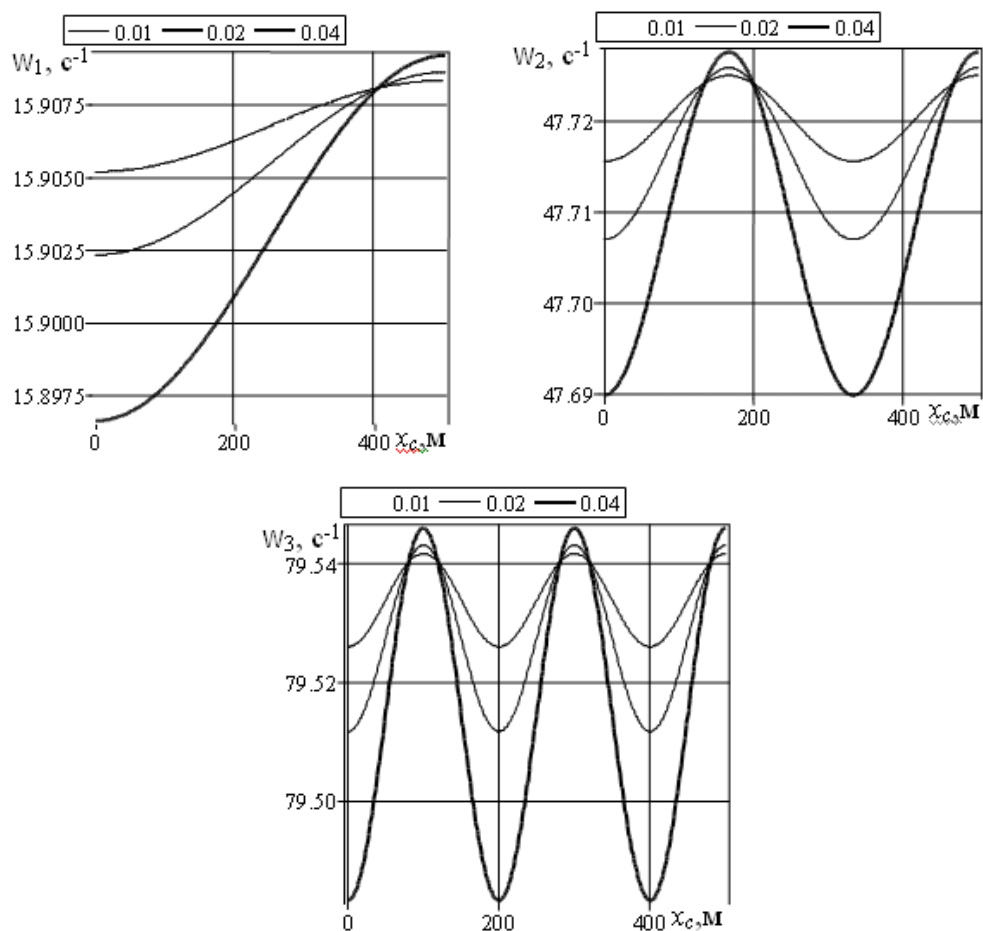


Рисунок 2. Зависимости круговых частот продольных колебаний штанги ω_1 , ω_2 , ω_3 от координаты надреза x_c для параметра $m = 0.1$ и различных l (в м)

Обратная задача. На рис. 3а приводятся зависимости параметра m от круговых частот продольных колебаний штанги ω_1 , ω_2 , ω_3 для координаты надреза $x_c = 200$ м и различных малых l (в м).

На рис. 3б приводятся зависимости параметра m от круговых частот продольных колебаний штанги ω_1 , ω_2 , ω_3 для координаты надреза $x_c = 200$ м и различных больших значений l (в м). Видно, что при одной и той же собственной частоте существуют два значения параметра m ; такой вывод также следует из квадратного относительно m уравнения (6).

Если частотное уравнение (6) записать для трех частот свободных продольных колебаний, то из полученной системы уравнений определяются координата надреза x_c , его длина l и параметр m . Например, для круговых частот продоль-

ных колебаний штанги $\omega_1 = 15.8660 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = 47.6420 \text{ с}^{-1}$, $\omega_3 = 79.5130 \text{ с}^{-1}$ решение обратной задачи дает, что штанга имеет надрез при $x_c = 56.66 \text{ м}$, $m = 0.448$, $l = 1.13 \text{ м}$. Данное решение является единственным, что видно из графиков на рис. 4, где приводятся зависимости длины надреза l от его координаты x_c при $m = 0.448$ для вышеприведенных значений круговых частот продольных колебаний штанги, так как видна только одна точка пересечения всех трех кривых.

На рис. 5 приводятся зависимости координаты надреза x_c , его длины l и параметра m от круговых частот продольных колебаний штанги ω_1 , для $\omega_2 = 47.6425 \text{ рад/с}$ (линия 1), $\omega_2 = 47.6430 \text{ рад/с}$ (линия 2), $\omega_2 = 47.6435 \text{ рад/с}$ (линия 3), $\omega_3 = 79.5000 \text{ рад/с}$.

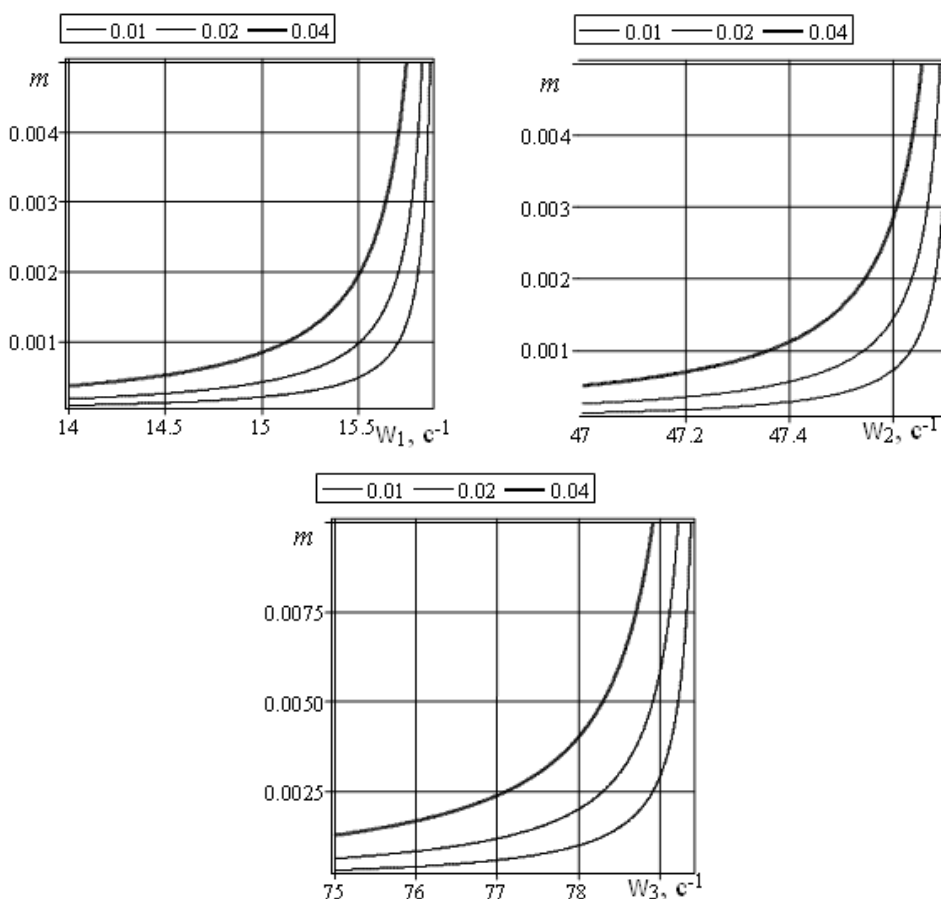


Рисунок 3а. Зависимости параметра m от круговых частот продольных колебаний штанги ω_1 , ω_2 , ω_3 для координаты надреза $x_c = 200 \text{ м}$ и различных l (в м).

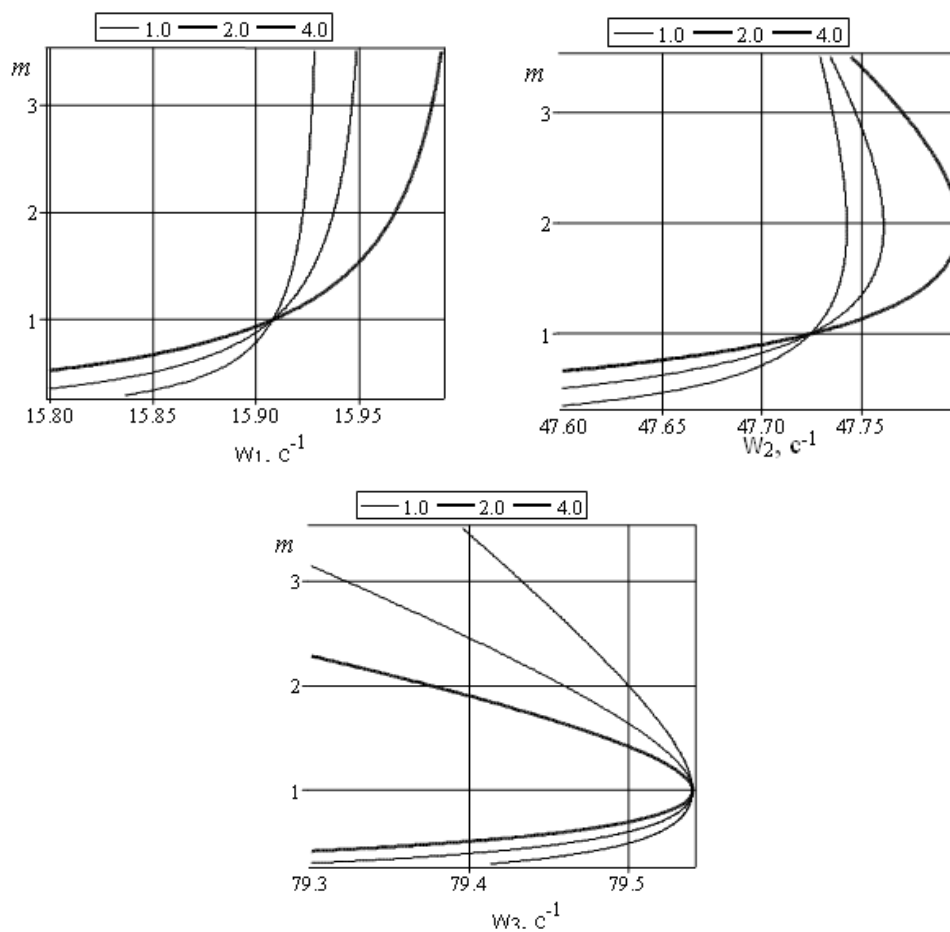


Рисунок 3б. Зависимости параметра m от круговых частот продольных колебаний штанги $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ для координаты надреза $x_c = 50$ м и различных l (в м)

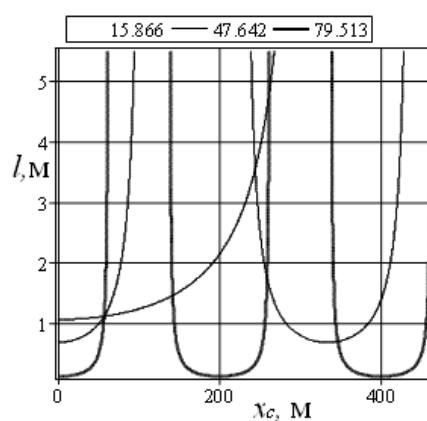


Рисунок 4

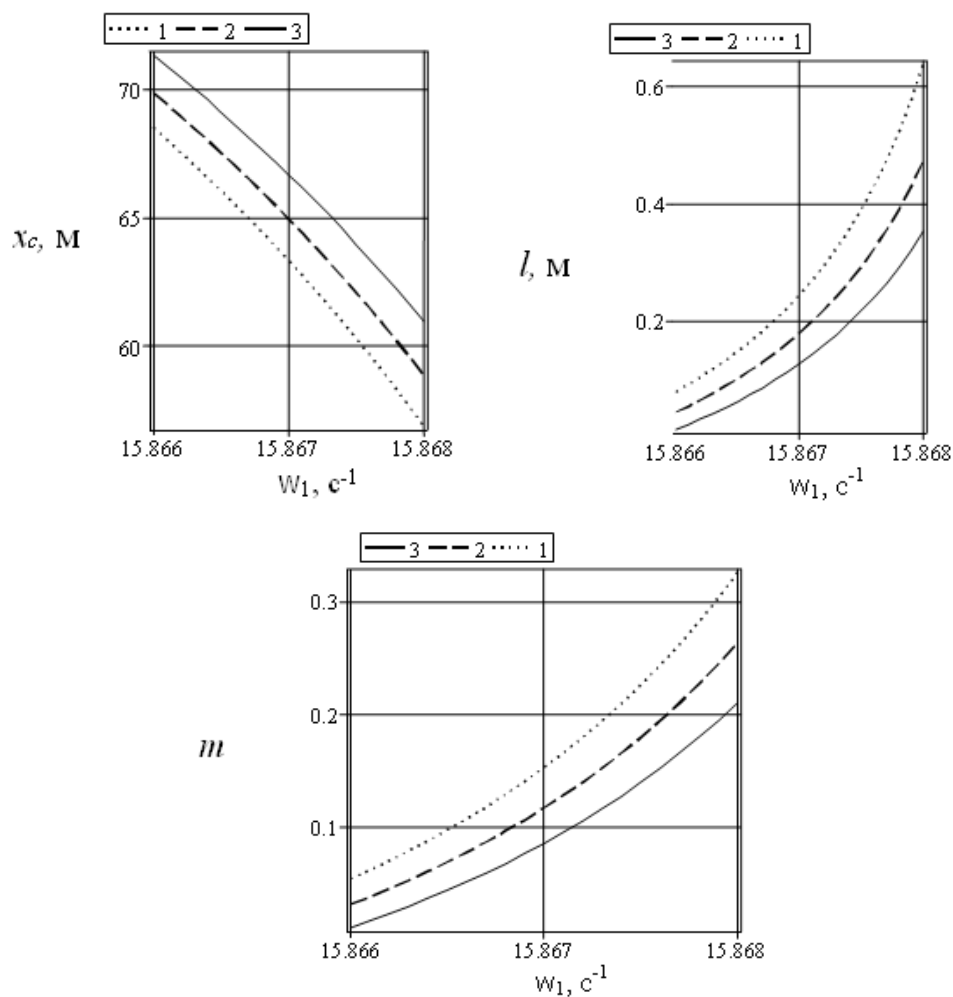


Рисунок 5. Зависимости координаты надреза x_c , его длины l и параметра m от круговой частоты продольных колебаний штанги ω_1

Проведенные исследования показывают, что по трем частотам свободных продольных колебаний можно определить координату надреза x_c , его длину l и параметр надреза m .

Автор выражает благодарность М.А. Ильгамову за постановку задачи и помощь в выполнении работы.

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ 08-01-97008-р_поволжье_a.

Литература

1. Ваньков Ю.В., Казаков Р.Б., Яковлева Э.Р. Собственные частоты изделия как информативный признак наличия дефектов. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://ejta.org> 2005, 5.
2. Ильгамов М.А. Диагностика повреждений вертикальной штанги. Труды института механики УНЦ РАН. Вып. 5. – Уфа: «Гилем». 2007. С.201-211.
3. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит. 2007. 224 с.
4. Gladwell G. M. L. Inverse problems in vibration. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2004. (Русский перевод: Глэдвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. –608 с.
5. Ватульян А. О., Солуянов Н. О. Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне. // Дефектоскопия. 2005. №9. С. 44-56.
6. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения // М.: Наука, 1974. – 450 с.
7. Разянцев А.О. Виброакустическая диагностика глубиннонасосных штанг в процессе эксплуатации. Диссертация к.т.н., – Уфа: УГНТУ, 1999, -108с.
8. Лопатников С.Л., Гама Б.А., Краутхаузер К., Джиллеспи Дж. Мл. О применимости классического анализа опытов с разрезным стержнем Гопкинсона // Письма в ЖТФ, 2004. Т.30. Вып. 3. С. 39-46.
9. Kolsky N. An investigation of mechanical properties of materials at very high rates of loading // Proceedings of the Physics Society of London. 1949. V. 62. № 359. P. 676-700.
10. Окрушко Е.И., Ураксеев М.А. Дефектоскопия глубиннонасосных штанг. М.: Недра, 1983. – 112 с.
11. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. 2009. Том 45. № 6. С. 83-89.