

ИССЛЕДОВАНИЕ НИЗКОЧАСТОТНОГО ТРУБЧАТОГО РЕЗОНАТОРА С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ДЛЯ ВИБРАЦИОННО-ЧАСТОТНОГО ПЛОТНОМЕРА ЖИДКИХ СРЕД

Гусейнов Т.К.

Сумгаитский государственный университет

Формируется математическая модель резонатора в форме трубки с жесткозакрепленными концами и сосредоточенными неоднородностями в виде жестко присоединенных инерционных масс. Составлено и решено дифференциальное уравнение собственных частот колебаний данной трубки. Найдена аналитическая зависимость для определения амплитудных значений реактивных сил в узлах закрепления трубки.

Большинство известных в настоящее время вибрационно-частотных плотномеров жидких сред в качестве чувствительных элементов имеют высокочастотные проточные механические системы - резонаторы (рабочая частота свыше 1000 Гц) [1]. Это ограничивает область применения этих приборов чистыми жидкостями и не позволяет их эффективно использовать для определения плотности двухфазных сред типа жидкость - твердые включения, т.к. высокая собственная частота вызывает фазовый сдвиг между движением жидкости и твердых частиц. В связи с этим для работы с подобными жидкостями рекомендуется использовать низкочастотные резонаторы [2]. Однако уменьшение частоты собственных колебаний связано с уменьшением добротности механической колебательной системы, а следовательно и точности измерения. Поэтому поиск приемов снижения собственной частоты колебаний резонаторов ВЧП с обеспечением их приемлемой добротности представляет определенный интерес.

Настоящая работа посвящена исследованию трубчатого резонатора с сосредоточенной неоднородностью в виде жестко присоединенных инерционных масс. Известно, что введение в исходную колебательную систему дополнительных масс приводит к снижению собственной частоты системы. С другой стороны, введенные массы изменяют форму колебаний резонатора и тем самым влияют на величину реактивных сил в местах защемления резонатора – основного источника рассеяния колебательной энергии, а следовательно и снижения добротности. В связи с этим задача исследования заключается в поиске

таких параметров инерционных масс и их месторасположения, которые бы обеспечили заданную частоту собственных колебаний при минимальной величине реактивных усилий в местах защемления резонатора.

Схема исследуемого резонатора показана на рис.1. Учитывая симметричность колебаний трубки относительно ее середины расчетная схема резонатора может быть представлена как на рис. 2. Разделим условно половину трубки на два участка: первый – от места заделки до инерционной массы, второй – от инерционной массы до середины трубки.



Рисунок 1. Общая схема резонатора

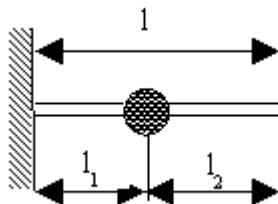


Рисунок 2. Расчетная схема

Примем соответственно длины участков l_1 и l_2 , при этом $l = l_1 + l_2$. Исходя из прежних допущений и обозначений для обоих участков уравнения движения записываются как

$$EI \frac{\partial^4 y_i}{\partial x^4} + (m_m + m_{жс}) \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = 0, i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Полагаем, что

$$y(x, t) = v(t)z(x)$$

где $z(x)$ - решение дифференциального уравнения IV порядка

$$z^{IV} - \nu^4 z = 0$$

а $v(t)$ - решение дифференциального уравнения 2-порядка

$$\ddot{v}_i + \omega v_i = 0,$$

$$\omega = v^2 \sqrt{\frac{EI}{m_m + m_{ж}}}.$$

Здесь $\omega = 2\pi f_0$ (f_0 - собственная частота колебаний трубки) – круговая частота колебаний.

Общее решение уравнения (1) для обоих участков имеет вид

$$z(x) = AS(vx_i) + BT(vx_i) + CU(vx_i) + DV(vx_i)$$

Для первого участка из условия защемления при $x_i = 0$ имеем $z_1(0) = z_1'(0) = 0$. Отсюда $z_1(x_1)$ можно представить в виде

$$z_1(x_1) = a_1U(vl_1) + b_1V(vl_1), \quad (2)$$

где a_1, b_1 подлежат определению из граничных условий сопряжения.

Для второго участка из условия отсутствия угла поворота и перерезывающей силы при $x_2 = 0$ имеем $z_2'(x_2) = z_2'''(0) = 0$, т.е.

$$z_2(x_2) = a_2S(vl_2) + b_2U(vl_2),$$

где a_2, b_2 подлежат определению из граничных условий сопряжения.

В точке сопряжения участков при $x_1 = l_1$ и $x_2 = -l_2$ имеем

$$\begin{aligned} z_1(l_1) &= z_2(-l_2); \\ z_1'(l_1) &= z_2'(-l_2); \\ z_2''(-l_2) &= z_1''(l_1) + M/EI; \\ z_2'''(-l_2) &= z_1'''(l_1) + F/EI \end{aligned} \quad (3)$$

где M и F - момент и сила, действующие со стороны трубки на массу.

Согласно первым двум условиям (3) имеем

$$\begin{aligned} a_1U(vl_1) + b_1V(vl_1) &= a_2S(vl_2) + b_2U(vl_2); \\ a_1T(vl_1) + b_1U(vl_1) &= -a_2V(vl_2) - b_2T(vl_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Введем следующие матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}; B_1 = \begin{pmatrix} S(vl_2) & U(vl_2) \\ -V(vl_2) & -T(vl_2) \end{pmatrix}; B_2 = \begin{pmatrix} U(vl_1) & V(vl_1) \\ T(vl_1) & U(vl_1) \end{pmatrix}.$$

Тогда систему уравнений (4) можно записать в следующем виде:

$$B_2 A_1 = B_1 A_2.$$

Отсюда

$$A_2 = B_1^{-1} B_2 A_1. \quad (5)$$

Из третьего и четвертого условий (3) имеем

$$\begin{aligned} a_1 S(\nu l_1) + b_1 T(\nu l_1) + \frac{M}{\nu^2 \nu EI} &= a_2 U(\nu l_2) + b_2 S(\nu l_2); \\ a_1 V(\nu l_1) + b_1 T(\nu l_1) + \frac{F}{\nu^3 \nu EI} &= -a_2 T(\nu l_2) - b_2 V(\nu l_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Введем матрицы:

$$B_3 = \begin{pmatrix} U(\nu l_2) & S(\nu l_2) \\ -T(\nu l_2) & -V(\nu l_2) \end{pmatrix}; B_4 = \begin{pmatrix} S(\nu l_1) & T(\nu l_1) \\ V(\nu l_1) & S(\nu l_1) \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} \frac{M}{\nu \nu^2 EI} \\ \frac{F}{\nu \nu^3 EI} \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (5) запишем в виде

$$B_4 A_1 + C = B_3 A_2. \quad (7)$$

Найдем M и F . Из уравнения вращательного движения массы имеем

$$I_c \ddot{\theta} = M, \quad (8)$$

где $\theta = z_1(l_1)\nu(t)$ - угол поворота трубки в месте крепления массы; I_c - момент инерции массы.

Из соотношения (7) следует

$$M = -2\nu EI \nu^2 \alpha (T(\nu l_1)U(\nu l_1))A_1, \quad (9)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{I_c \nu^3}{m_c}.$$

Из уравнения поступательного движения массы m_c находим

$$m_c \ddot{y}_1 = -F, \quad (10)$$

где y_1 - линейное перемещение массы m_c .

Из выражения (10) получаем

$$F = 2\nu EI \nu^3 \beta (U(\nu l_1)V(\nu l_1))A_1, \quad (11)$$

$$\text{где } \beta = \frac{m_c \nu}{2m}, \text{ а } m = m_m + m_{ж}.$$

С учетом выражений (9) и (11) для C имеем

$$C = 2DA_1. \quad (12)$$

Здесь

$$D = \begin{pmatrix} -\alpha T(vl_1) & -\alpha U(vl_1) \\ \beta U(vl_1) & \beta V(vl_1) \end{pmatrix}.$$

Подставив в (6) выражения (5) и (12), получим

$$XA_1 = 0, \quad (13)$$

где $X = B_3B_1^{-1}B_2 - B_4 - 2D$, а ее элементы

$$x_{11} = \frac{1}{2}(\cos vl_2 shvl + chvl_2 \sin vl) - \alpha (shvl_1 + \sin vl_1) *$$

$$* (\cos vl_2 \sin vl_2 + shvl_2 \cos vl_2);$$

$$x_{12} = \frac{1}{2}(\cos vl_2 chvl - chvl_2 \cos vl) + \alpha (\cos vl_1 - chvl_1) *$$

$$* (chvl_2 \sin vl_2 + shvl_2 \cos vl_2);$$

$$x_{21} = \frac{1}{2}(\sin vl_2 shvl - shvl_2 \sin vl) - \beta (\cos vl_1 - chvl_1) *$$

$$* (chvl_2 \sin vl_2 + shvl_2 \cos vl_2);$$

$$x_{22} = \frac{1}{2}(\sin vl_2 chvl + shvl_2 \cos vl) - \beta (\sin vl_1 - shvl_1) *$$

$$* (chvl_2 \sin vl_2 + shvl_2 \cos vl_2).$$

Отличное от нуля решение уравнения (13) находится из выполнения условия $\det X = 0$. Раскрывая данный определитель, получим уравнение для параметра v .

$$A(vl/2) - 2A(vl_2)D(vl_1)\alpha\beta - (A(vl_1)A(vl_2) + D(vl_1)S(vl_2))\alpha + \\ + (D(vl_1)C(vl_2) - B(vl_1)A(vl_2))\beta = 0. \quad (14)$$

Здесь $A(vx), B(vx), C(vx), D(vx)$ и $S(vx)$ так называемые функции Прагера и Гогенемзера [3]:

$$A(vx) = chvx \sin vx + shvx \cos vx;$$

$$B(vx) = chvx \sin vx - shvx \cos vx;$$

$$C(vx) = 2chvx \cos vx;$$

$$D(vx) = 2shvx \sin vx.$$

Проверим полученные результаты на предмет согласования с известными расчетными соотношениями. Например, при отсутствии масс m_c коэффициенты α и β становятся равными нулю и уравнение (14) принимает вид

$$ch \frac{\nu l}{2} \sin \frac{\nu l}{2} + sh \frac{\nu l}{2} \cos \frac{\nu l}{2} = 0. \quad (15)$$

Ненулевое решение (15) для симметричных колебаний - $\nu = \frac{4.73}{l}$, т.е. получаем известное решение уравнения собственных колебаний трубки с заземленными концами.

Перейдем ко второму этапу исследования, а именно нахождению аналитического выражения для определения величины реактивных сил в местах заземления трубки.

Сила в заделке:

$$F = EI y_1'''(0, t).$$

Амплитудное значение этой величины:

$$F_A = EI z_1'''(0). \quad (16)$$

С учетом (2) имеем

$$z_1(x_1) = (U(\nu l_1)V(\nu l_1))A_1,$$

откуда

$$z_1'''(0) = \nu^3(0,1)A_1.$$

Согласно (13) A_1 будучи собственным вектором матрицы X , вычисленной при значении ν , являющемся решением уравнения частот (14), определяется с точностью скалярного множителя

$$A_1 = \frac{\lambda}{EI} \begin{pmatrix} x_{12} \\ -x_{11} \end{pmatrix}.$$

Тогда для F_A имеем

$$F_A = \lambda \nu^3 x_{11}, \quad (17)$$

где λ - константа, определяющая интенсивность колебаний, т.е. зависящая от начальных условий.

В качестве интенсивности колебаний может быть принята амплитуда h перемещений средней точки трубки. Будем полагать, что независимо от

параметров системы в ней обеспечивается фиксированная амплитуда h . Выразим ее через эти параметры. Поскольку,

$$h = z(l/2),$$

то имеем

$$h = \frac{\lambda (V(vl_2)V(vl_1) + T(vl_2)U(vl_1))x_{11} - (V(vl_2)U(vl_1) + T(vl_2)T(vl_1))x_{12}}{EI(V(vl_2)U(vl_2) - S(vl_2)T(vl_2))} \quad (18)$$

Учитывая значение λ из (17) в формуле (18) имеем

$$F_A = EId^4 (n^4 - 1) \left[\frac{\lambda_i}{l} \right]^3 \frac{h(V(vl_2)U(vl_2) - S(vl_2)T(vl_2))x_{11}}{(V(vl_2)V(vl_1) + T(vl_2)U(vl_1))x_{11} - (V(vl_2)U(vl_1) + T(vl_2)T(vl_1))x_{12}}$$

Отсюда следует, что величина поперечных реакций F_A равняется нулю при выполнении следующего условия

$$V(vl_2)U(vl_2) - S(vl_2)T(vl_2) = 0 \quad (19)$$

Полученные результаты свидетельствуют о существовании бесконечного множества параметров предложенного резонатора, при которых обеспечивается равенство нулю реактивных сил в местах заземления трубки.

Опыт разработки вибрационных плотномеров показывает, что материал трубки, его внутренний диаметр и толщина выбираются исходя из технологических условий измерения, а собственная частота колебаний из условия обеспечения заданной абсолютной чувствительности. Тогда подбирая параметры сосредоточенных масс исходя из конструктивных соображений остальные параметры могут быть определены следующим образом

- определение значения параметра v исходя из заданной собственной частоты колебаний резонатора;
- определение длины участка l_2 из уравнения (19);
- определение длины участка l_1 из уравнения (14).

При составлении уравнения движения (1) нами не было учтено имеющие место в реальных колебательных системах трение. В связи с этим на практике полного снижения реактивных сил в местах заземления трубки резонатора не удастся. Однако качественная сторона задачи остается без изменений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков Ю.П. Вибрационные плотномеры .- М: Энергоатомиздат, 1991.
2. Жуков Ю.П., Бегунов В.Н. Измерение плотности жидких сред вибрационно-частотным методом // Приборы и системы управления №9, 1976. с.28-30.
3. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968.