

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В ГАЗОПРОВОДАХ С УЧЕТОМ СИЛ ИНЕРЦИИ ПОТОКА

Аствацатурьян Р.Е., Кочарян Е.В.

Кубанский государственный технологический университет

Разработана новая приближённая модель движения газа в трубопроводах, позволяющая рассчитывать процессы нестационарного течения газа в газопроводах с учётом инерции потока. Проведено сравнение результатов расчётов по данной модели с точным аналитическим решением исходной линеаризованной системы уравнений транспорта газа.

В работе [1] приводится модель, описывающая неустановившееся движение газа в трубопроводе с учетом сил инерции. Однако, несмотря на то, что данная модель является точным аналитическим решением исходной линеаризованной системы уравнений движения газа, она достаточно сложна и мало пригодна для оперативных расчетов. При этом потребность в методике, позволяющей решать задачи транспорта газа с достаточной точностью и быстродействием, имеется.

Потери давления от преодоления инерции потока, возникают вследствие изменения массовой скорости газа в каждом сечении трубопровода во времени. Этот эффект оказывает наибольшее влияние на динамику транспорта газа в коротких трубопроводах, где потери на трение не велики.

Рассмотрим алгоритм предлагаемой модели на примере решения системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающей нестационарное изотермическое движение газа с учетом инерции потока [1]:

$$Cp \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial p^2}{\partial x} = -Aq^2, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + B \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

где p, q – давление и объемный расход газа;

A, B, C – коэффициенты, зависящие от параметров газопровода;

P_0, T_0 – стандартные величины при нормальных условиях.

$$A = \frac{16\lambda zTL}{\pi^2 D^5 gR} \cdot \left(\frac{P_0}{T_0} \right)^2, \quad B = \frac{4zT}{\pi D^2 L} \cdot \frac{P_0}{T_0}, \quad C = \frac{8L}{\pi D^2 gR} \cdot \frac{P_0}{T_0} \quad 0 \leq x \leq L$$

Для получения аналитического решения системы (1), (2) используем линеаризацию Чарного И.А. [2] в уравнении движения (1), которая заключается в замене величины $\frac{q}{p}$ ее некоторым средним значением.

Тогда уравнение движения (1) примет вид:

$$\frac{C}{2} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{A}{2} a q. \quad (3)$$

Для удобства исследования и обобщения решений представим линеаризованную систему уравнений в безразмерной форме и в отклонениях от установившегося режима:

$$k \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial \bar{x}} + W = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial U}{\partial \tau} = 0, \quad (5)$$

где $U(\bar{x}, \tau)$, $W(\bar{x}, \tau)$ – безразмерные отклонения давления и расхода от стационарного значения:

$$U = \frac{p(\bar{x}, \tau)}{P_{1н}} - \frac{p_0(\bar{x})}{P_{1н}} = \frac{p(\bar{x}, \tau)}{P_{1н}} - \sqrt{\frac{P_{0н}^2}{P_{1н}^2} - \bar{x} \left(\frac{P_{0н}^2}{P_{1н}^2} - 1 \right)},$$

$$W = \delta \frac{a}{2} \left[\frac{q(\bar{x}, \tau)}{q(\bar{x}, 0)} - 1 \right].$$

$$\bar{p} = \frac{p}{P_{1н}}; \quad \bar{q} = \frac{q}{q_n}; \quad \bar{x} = \frac{x}{L};$$

$$P_0(x) = \sqrt{P_{0н}^2 - (P_{0н}^2 - P_{1н}^2) \frac{x}{L}} \quad - \text{ начальное распределение давления в}$$

трубопроводе;

$$\tau = \frac{2t}{La} \sqrt{\frac{zTRgD}{\lambda L \delta}} \quad - \text{ безразмерное время;}$$

$$\delta = \text{sign}(q) \cdot \left[\left(\frac{P_{0н}}{P_{1н}} \right)^2 - 1 \right];$$

$$a = \frac{q}{q_n} \frac{P_{1н}}{p} \quad - \text{ параметр линеаризации;}$$

L, D, λ - длина, диаметр, коэффициент гидравлического сопротивления трубопровода;

T, R, z – температура газа, газовая постоянная и коэффициент сжимаемости газа;

$k = \frac{4D}{\lambda L \delta a^2}$ - единственный параметр в полученной системе (4), (5), он учитывает влияние на переходный процесс инерционного члена $C_p \frac{\partial q}{\partial t}$ в уравнении (1).

Применив к уравнениям (4), (5) преобразование Лапласа, сводим два уравнения к одному, дифференцируя второе из них по \bar{x} и результат подставляя в первое:

$$\frac{\partial^2 \bar{W}(\bar{x}, s)}{\partial \bar{x}^2} - s(1 + ks)\bar{W}(\bar{x}, s) = 0, \quad (6)$$

где s - комплексная переменная (параметр преобразования Лапласа).

Искомую функцию представим в виде параболической зависимости по координате:

$$\bar{W}(\bar{x}) = b_0 + b_1 \bar{x} + b_2 \bar{x}^n. \quad (7)$$

Коэффициенты $b_i(t)$ зависят от времени и их необходимо найти из граничных условий и из уравнения (6). В (7) возможно варьирование показателем параболы n с целью повышения точности решения задачи. Удовлетворить уравнению (6) во всех точках переменной $0 \leq \bar{x} \leq 1$ полиномом (7) невозможно, поэтому следует говорить о совпадении только в одной точке $\bar{x} = \bar{x}_1$.

Вывод предложенной модели рассмотрим на примере граничных условий:

$$\begin{aligned} \bar{x} = 0 \quad \bar{W}_0 &= \bar{F}_1(s), \\ \bar{x} = 1 \quad \bar{U}_1 &= -\frac{1}{s} \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{x}} = \bar{F}_2(s). \end{aligned} \quad (8)$$

Оперируя уравнениями (6 - 8) имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{x} = 0 \quad b_0 &= \bar{F}_1(s), \\ \bar{x} = 1 \quad -\frac{1}{s}(b_1 + nb_2) &= \bar{F}_2(s), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\bar{x} = \bar{x}_1 \quad n(n-1)b_2 \bar{x}_1^{n-2} - s(1+ks)(b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_1^n) = 0$$

откуда находим коэффициенты b_i :

$$\begin{aligned}
b_0 &= \bar{F}_1(s), \\
b_1 &= -s\bar{F}_2(s) - n(\bar{F}_1(s) \frac{s(1+ks)}{n(n-1)\bar{x}_1^{n-2} + s(1+ks)(n\bar{x}_1 - \bar{x}_1^n)} - \bar{F}_2(s) \frac{\bar{x}_1 s^2(1+ks)}{n(n-1)\bar{x}_1^{n-2} + s(1+ks)(n\bar{x}_1 - \bar{x}_1^n)}), \\
b_2 &= \bar{F}_1(s) \frac{s(1+ks)}{n(n-1)\bar{x}_1^{n-2} + s(1+ks)(n\bar{x}_1 - \bar{x}_1^n)} - \bar{F}_2(s) \frac{\bar{x}_1 s^2(1+ks)}{n(n-1)\bar{x}_1^{n-2} + s(1+ks)(n\bar{x}_1 - \bar{x}_1^n)},
\end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя значения b_i в (7), получим выражение для расхода:

$$\begin{aligned}
\bar{W}(s, \bar{x}) &= \bar{F}_1(s) \left[1 + \frac{s(1+ks)(-n\bar{x} + \bar{x}^n)}{n(n-1)\bar{x}_1^{n-2} + s(1+ks)(n\bar{x}_1 - \bar{x}_1^n)} \right] - \\
&- \bar{F}_2(s) \left[s\bar{x} + \frac{s^2(1+ks)(\bar{x}_1\bar{x}^n - n\bar{x}\bar{x}_1)}{n(n-1)\bar{x}_1^{n-2} + s(1+ks)(n\bar{x}_1 - \bar{x}_1^n)} \right],
\end{aligned} \tag{11}$$

Для давления:

$$\begin{aligned}
\bar{U}(s, x) &= -\frac{1}{s} \frac{\partial \bar{W}(s, \bar{x})}{\partial \bar{x}} = -\frac{1}{s} \left[\bar{F}_1(s) \frac{s(1+ks)(n\bar{x}^{n-1} - n)}{n(n-1)\bar{x}_1^{n-2} + s(1+ks)(n\bar{x}_1 - \bar{x}_1^n)} \right] - \\
&- \frac{1}{s} \bar{F}_2(s) \left[s + \frac{s^2(1+ks)(n\bar{x}_1\bar{x}^{n-1} - n\bar{x}_1)}{n(n-1)\bar{x}_1^{n-2} + s(1+ks)(n\bar{x}_1 - \bar{x}_1^n)} \right],
\end{aligned} \tag{12}$$

Аналогично решаем для других граничных условий, например давления в начале $\bar{U}(0, s) = \bar{F}_3(s)$ и расхода в конце $\bar{W}(1, s) = \bar{F}_4(s)$:

$$\begin{aligned}
\bar{U}(1, s) &= \bar{F}_4(s) \left[\frac{n(1+ks)}{s(1+ks)(\bar{x}_1^n - 1) - n(n-1)\bar{x}_1^{n-2}} \right] + \\
&+ \bar{F}_3(s) \left[(1+ks) + \frac{s(1+ks)(1+\bar{x}_1)n}{n(n-1)\bar{x}_1^{n-2} + s(1+ks)(1-\bar{x}_1^n)} \right],
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\bar{W}(0, s) &= \bar{F}_4(s) \left[1 - \frac{s(1+ks)}{n(n-1)\bar{x}_1^{n-2} + s(1+ks)(1-\bar{x}_1^n)} \right] + \\
&+ \bar{F}_3(s) \left[s(1+ks) + \frac{s^2(1+ks)(\bar{x}_1 - 1)}{n(n-1)\bar{x}_1^{n-2} + s(1+ks)(1-\bar{x}_1^n)} \right],
\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь $\bar{F}_i(s)$ – заданные безразмерные возмущения на концах трубопровода.

Полученные операторные уравнения характеризуют изменения объемного расхода и давления в любой точке $\bar{x} = x/L$ участка трубопровода.

Далее запишем передаточные функции при $x = 0$ и $x = 1$ для граничных условий:

– расход в начале $\bar{W}(0, s) = \bar{F}_1(s)$ и давление в конце $\bar{U}(1, s) = \bar{F}_2(s)$:

$$\bar{U}(0, s) = \bar{F}_1(s) \left[\frac{n(1+ks)}{n(n-1)\bar{x}_1^{n-2} + s(1+ks)(n\bar{x}_1 - \bar{x}_1^n)} \right] + \bar{F}_2(s) \left[(1+ks) - \frac{s(1+ks)n\bar{x}_1}{n(n-1)\bar{x}_1^{n-2} + s(1+ks)(n\bar{x}_1 - \bar{x}_1^n)} \right], \quad (15)$$

$$\bar{W}(1, s) = \bar{F}_1(s) \left[1 + \frac{s(1+ks)(1-n)}{n(n-1)\bar{x}_1^{n-2} + s(1+ks)(n\bar{x}_1 - \bar{x}_1^n)} \right] - \bar{F}_2(s) \left[s(1+ks) + \frac{s^2(1+ks)\bar{x}_1(1-n)}{n(n-1)\bar{x}_1^{n-2} + s(1+ks)(n\bar{x}_1 - \bar{x}_1^n)} \right], \quad (16)$$

– давление в начале $\bar{U}(0, s) = \bar{F}_3(s)$ и расход в конце $\bar{W}(1, s) = \bar{F}_4(s)$:

$$\bar{U}(1, s) = \bar{F}_4(s) \left[\frac{n(1+ks)}{s(1+ks)(\bar{x}_1^n - 1) - n(n-1)\bar{x}_1^{n-2}} \right] + \bar{F}_3(s) \left[(1+ks) + \frac{s(1+ks)(1+\bar{x}_1)n}{n(n-1)\bar{x}_1^{n-2} + s(1+ks)(1-\bar{x}_1^n)} \right], \quad (17)$$

$$\bar{W}(0, s) = \bar{F}_4(s) \left[1 - \frac{s(1+ks)}{n(n-1)\bar{x}_1^{n-2} + s(1+ks)(1-\bar{x}_1^n)} \right] + \bar{F}_3(s) \left[s(1+ks) + \frac{s^2(1+ks)(\bar{x}_1 - 1)}{n(n-1)\bar{x}_1^{n-2} + s(1+ks)(1-\bar{x}_1^n)} \right], \quad (18)$$

Качество полученной приближенной модели существенно зависит от выбора свободных параметров \bar{x}_1 и n . Показатель n определяет степень “искривления” кривых распределения параметров вдоль канала, и он зависит от интенсивности их возмущений на концах трубопровода.

Апробацию предложенной модели проведем путем сравнения с точным аналитическим решением исходной линеаризованной системы уравнений [1]. Учитывая рекомендации [3], что в магистральных газопроводах большой производительности отношение конечных давлений обычно составляет не более

1,5 (т.е. берем $1,1 \leq \frac{P_{0н}}{P_{1н}} \leq 1,5$) и, принимая значение коэффициента линеаризации

в диапазоне $a = \frac{\bar{q}}{\bar{p}} \approx 1 \div 1,5$, определяем, что наиболее вероятный диапазон изменения величины $k \approx 0,001 \div 0,1$. Сравнение проводилось для разных вариантов граничных условий, величины k , значений скачкообразных возмущений.

Ниже приведены результаты сравнения давления в трубе для скачка расхода в начале газопровода $\bar{W}(0, \tau) = 0,125$ и постоянном давлении в конце трубы, $k = 0,05$, $n = 2,33$ и $\bar{x}_1 = 0,9$ (значения n и \bar{x}_1 найдены перебором вариантов).

После преобразования по Лапласу, имеем:

$$\begin{aligned} \bar{U}(0, \tau) = \bar{F}_1(\tau) \cdot n \cdot \left[\frac{1}{kb} \left(\frac{1}{y_1 y_2} + \frac{y_2 e^{y_1 \tau} - y_1 e^{y_2 \tau}}{y_1 y_2 (y_1 - y_2)} \right) + \frac{1}{b} \left(\frac{e^{y_1 \tau} - e^{y_2 \tau}}{y_1 - y_2} \right) \right] + \\ + \bar{F}_2(\tau) \cdot \left[(1 + \delta(\tau)) - \frac{n \bar{x}_1}{b} \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{e^{y_1 \tau} - e^{y_2 \tau}}{y_1 - y_2} + \frac{x_1 e^{y_1 \tau} - x_2 e^{y_2 \tau}}{y_1 - y_2} \right) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

где $a = n(n-1)\bar{x}_1^{n-2}$,

$$b = n\bar{x}_1 - \bar{x}_1^n,$$

$$c = \frac{a}{b},$$

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4kc}}{2k}, \quad y_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4kc}}{2k}.$$

$$\begin{aligned} \bar{U}(1, \tau) = \bar{F}_4(\tau) \cdot n \cdot \left[\frac{1}{kb} \left(\frac{1}{y_1 y_2} + \frac{y_2 e^{y_1 \tau} - y_1 e^{y_2 \tau}}{y_1 y_2 (y_1 - y_2)} \right) + \frac{1}{b} \left(\frac{e^{y_1 \tau} - e^{y_2 \tau}}{y_1 - y_2} \right) \right] + \\ + \bar{F}_3(\tau) \cdot \left[(1 + \delta(\tau)) - n(1 + \bar{x}_1) \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{e^{y_1 \tau} - e^{y_2 \tau}}{y_1 - y_2} + \frac{y_1 e^{y_1 \tau} - y_2 e^{y_2 \tau}}{y_1 - y_2} \right) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где $a = n(n-1)\bar{x}_1^{n-2}$,

$$b = \bar{x}_1^n - 1,$$

$$c = \frac{a}{b},$$

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4kc}}{2k}, \quad y_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4kc}}{2k},$$

Анализ показал, что при скачке расхода в начале $\bar{W}(0, \tau) = 0,125$ и постоянном давлении в конце (рис. 1) максимальная ошибка 0,2 %. Для давления в конце при скачке расхода в конце $\bar{W}(1, \tau) = 0,125$ и постоянном давлении в начале (рис. 2) при $n=1,79$ и $\bar{x}_1=0,1$ максимальная ошибка не более 0,1 %.

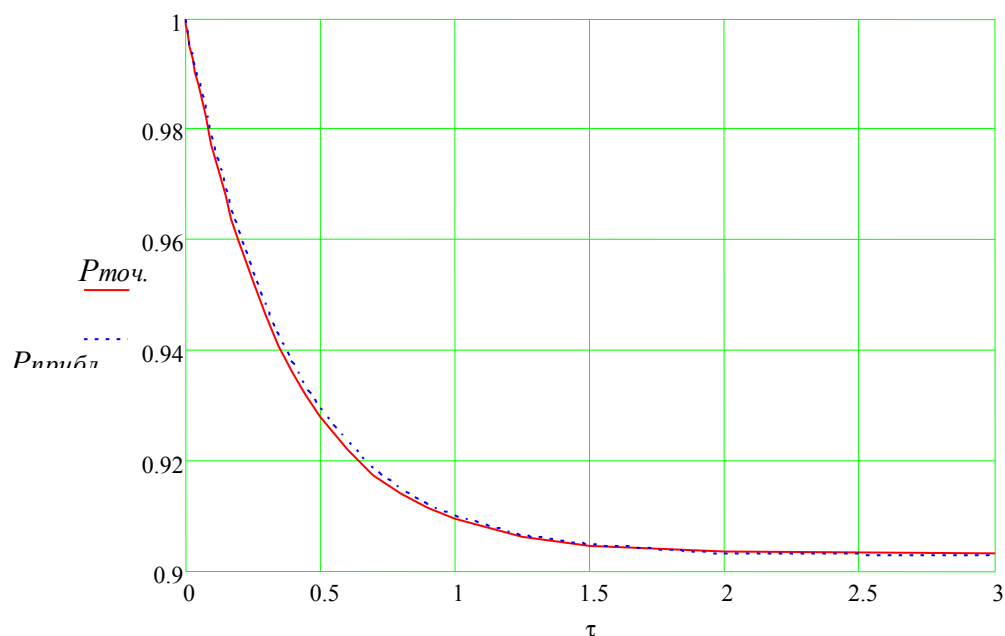


Рисунок 1. Зависимость давления в начале газопровода от времени τ :
P_{точ.} – точное аналитическое решение; *P_{прибл.}* –приближенное решение.

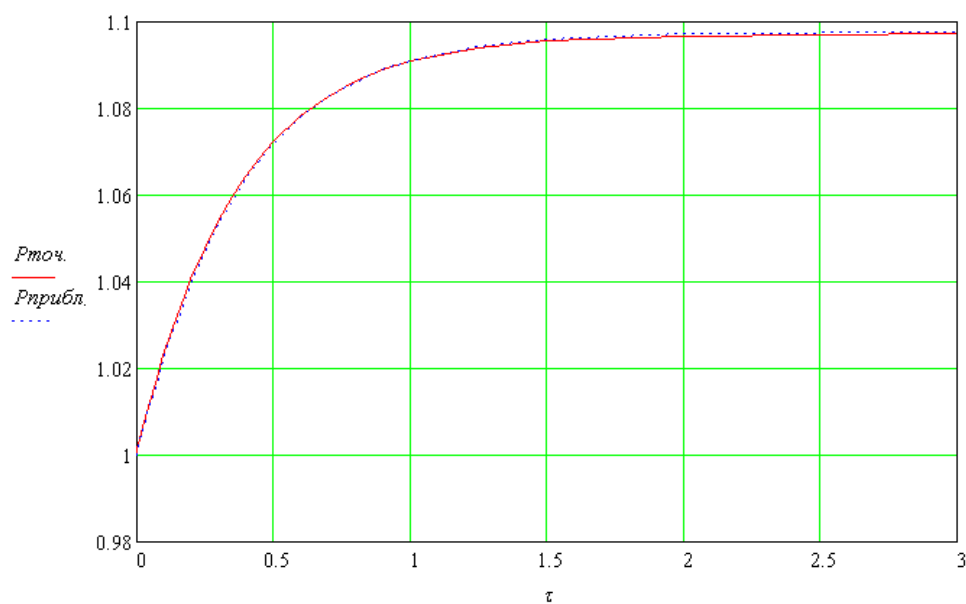


Рисунок 2. Зависимость давления в конце газопровода от времени τ :
P_{точ.} – точное аналитическое решение; *P_{прибл.}* –приближенное решение.

Необходимо заметить следующее, в ряде случаев допустимо пренебрегать инерционным членом в уравнении движения (1), тогда система уравнений, описывающая нестационарное изотермическое движение газа будет параболического типа, в отличие от исходной – гиперболического. Для плавного движения, без резких изменений расхода и давления газа, решения параболических уравнений достаточно хорошо передают количественные закономерности. Однако при резких изменениях и скачках параметров, особенно при возникновении ударных волн, необходимо пользоваться рассматриваемой нами исходной системой (1, 2).

Выявление законов изменения основных технологических параметров перекачки газа в условиях неустановившегося движения является важным предметом исследований и имеет большое значение для практики проектирования и эксплуатации трубопроводного транспорта, включая вопросы автоматизации и технико-экономических обоснований строительства. Так полученная модель может быть использована как для коротких газопроводов, так и для длинных магистральных газопроводов ($L \gg d$), где силы инерции будут играть заметную роль в самом начале переходного (неустановившегося) процесса.

Литература

1. Динамика и отклонения параметров газопроводов / Трофимов А.С., Судаков А.В., Куцев В.А., Терещенко И.В. – С-Пб.: 2004. –200 с.
2. Чарный И.А. Неустановившиеся движения реальной жидкости в трубах. – М.: Недра, 1975. – 296 с.
3. Щербаков С.Г. Проблемы трубопроводного транспорта нефти и газа. М.: Наука, 1982. – 208 с.